

XII Krise und re-Evolution der Grundlagen der Mathematik

Die Antinomien und paradoxen Eigenschaften der Mengenlehre Georg Cantors führten Ende des 19. Jahrhunderts zur Grundlagenkrise der Mathematik. Durch das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, ZFC, sollten widerspruchsfreie Grundlagen geschaffen werden.

Die Mathematiker und Logiker gehen mit großer Mehrheit davon aus, daß dies gelungen sei. In dem Buch „Nichts“ wird nachgewiesen, daß entscheidende Grundlagen auf metaphysische Annahmen zurückgehen, die im Widerspruch zur Realität stehen und deshalb falsch sind. Die Krise wurde durch ZFC nicht bewältigt, sondern vertieft.

Der Autor zählt auch Gödels Forderung der Unvollständigkeit der Theorie der natürlichen Zahlen sowie das Postulat, die Syntax der mathematischen Logik sei bedeutungslos, zu den Krisensymptomen.

Die phänomenale Entwicklung der angewandten wie auch der reinen Mathematik ist davon allerdings nicht betroffen. Eine adäquate Evolution der Grundlagen hat jedoch nicht stattgefunden, die Verbannung des „nichts“ aus Mathematik und Logik steht damit in enger Verbindung.

Die Fehler der gegenwärtigen Grundlagen und ihre Bereinigung werden in der folgenden Zusammenfassung der Artikel I - XI aufgezeigt:

I Empirische Tatsache : Die 0 ist keine Zahl, sondern repräsentiert „nichts“

Die tatsächliche Bedeutung der 0, „nichts“, „keine Zahl“, wurde 3 Jahrtausende lang respektiert, bevor sie im 16. Jahrhundert aufgrund von Vorbehalten gegen das metaphysische „Nichts“ in das Gegenteil, „Zahl“, verkehrt wurde. Dadurch wird eines der wichtigsten Axiome der mathematischen Logik, das 'tertium non datur', verletzt. Die ursprüngliche Bedeutung muß der Definition der 0 wieder zu Grunde gelegt werden. Die „Zahl“ 0 ist widersprüchlich. Daraus folgen Konsequenzen für die transfiniten Zahlen:

II Widersprüchlichkeit der transfinite Zahl ω und der Menge $\mathbb{N}$

Die Existenz der transfinite Zahlen Cantors setzt in der Definition des ZFC-Unendlichkeitsaxioms die 0 als natürliche Zahl voraus. Der notwendige Rückgriff auf die ursprüngliche Bedeutung der 0, „nichts“, „keine Zahl“, beweist die Widersprüchlichkeit transfiniter Zahlen.

Cantors Begründung transfiniter Zahlen und Mengen erfolgte auf andere Weise, sie ist nicht axiomatisch. Die Fehler werden in Artikel III diskutiert.

David Hilbert, bedeutendster Mathematiker seiner Zeit, hat bestätigt, dass das Transfinite der Realität widerspricht und nur eine Idee ist, besteht jedoch darauf, dass die mathematische Theorie konsistent sei. Aber eine Idee, die der Realität widerspricht, ist notwendigerweise falsch. Damit wird Henri Poincaré bestätigt, der kritisierte, daß zukünftige Generationen das Transfinite als Krankheit betrachten werden, von der die Mathematik genesen sei.

III Cantors Fehler in seiner Lehre des Transfiniten

- Cantors Fehler gehen vor allem von seiner falschen Begründung der 1. transfiniten Kardinalzahl $\aleph_0$ aus. Er setzt dabei die Bijektion einer Menge mit der Kardinalzahl $\aleph_0$ mit einer Menge voraus, die ein weiteres Element enthält und dementsprechend die Kardinalzahl $\aleph_0 + 1$ besitzt. Die angebliche Bijektion - daß sie nicht vorliegt wird in Artikel III demonstriert - würde die Gleichung $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ rechtfertigen. Im Gegensatz dazu fordert Cantor aufgrund des weiteren größeren Elementes aber die Gleichung $\omega \neq \omega + 1$. Im Endlichen sind Kardinal- und Ordinalzahlen immer gleich, im Transfiniten wird fälschlich ein antagonistischer Unterschied behauptet :

(1) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ aber $\omega \neq \omega + 1$.

- Die Kontinuumshypothese wird von Cantor wie folgt begründet :

Es gilt nicht nur $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$, sondern die Gleichheit vieler weiterer Kardinalzahlen wird abgeleitet. Durch Addition von 1 auf beiden Seiten erhält man $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$. Die Folge gleicher Kardinalzahlen setzt sich immer weiter fort bis zu $\aleph_0^n$:

(2) $\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \dots \aleph_0^n$

Die rationalen Zahlen besitzen ebenfalls die Kardinalzahl $\aleph_0$.

Aber für die Kardinalzahl der Menge der reellen Zahlen, $2^{\aleph_0}$, fordert Cantor durch sein 2. Diagonalargument:

$$(3) 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

Die Vermutung, daß zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ keine weiteren Kardinalzahlen liegen, wird als die 'Kontinuumhypothese' bezeichnet. Aber die Formel, nach der Cantor die reellen Zahlen errechnet (s. Artikel III), zeigt, daß $2^{\aleph_0}$ nicht die Kardinalzahl der reellen Zahlen, sondern die der rationalen Zahlen ist. Deshalb gilt:

$$(4) 2^{\aleph_0} = \aleph_0$$

Cantors 2. Diagonalargument, das (3) fordert, ist falsch, die Kontinuumhypothese ist obsolet.

- Cantor fordert die Gleichheit der Punktmengen unterschiedlichster geometrischer Objekte (beliebig kleine Strecken, unendliche Strecke und Fläche, unendlich-dimensionaler Raum). Die Gleichheit soll gelten, da die Kardinalzahlen der Punktmengen dieser Objekte gleich sind. Cantor setzt also voraus, daß die Kardinalzahlen auf Punkte abgebildet werden können.

Aber er fordert bereits bei seiner Begründung von $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$, daß trotz dieser Gleichheit ein weiteres Element d.h. ein weiterer Punkt vorliegt. Dies wird auch durch $\omega+1 > \omega$ bestätigt. Nicht die Gleichheit der Kardinalzahlen legt die Punktmengen fest, sondern die ungleichen Ordinalzahlen. Die behauptete Gleichheit der Punktmengen gibt es nicht.

- Die Äquivalenz von Mengen und Teilmengen ist für Cantor die charakteristischste Eigenschaft des Transfiniten, im Widerspruch zu Euklids 5. Axiom, „Das Ganze ist größer als der Teil“. Tatsächlich trifft die Äquivalenz bereits für endliche Mengen zu. Unterschiedliche räumliche Dichte der Elemente von Mengen und Teilmengen sind für das Paradoxon verantwortlich. Euklids Axiom bleibt gültig.

IV Die Widersprüchlichkeit der leeren und der transfiniten Menge

Die Existenz der leeren Menge $\emptyset$ wird durch ZFC axiomatisch gefordert. Nur damit läßt sich die transfinite Menge rechtfertigen. $\emptyset$ ist als Menge ohne Elemente definiert, ist aber selbst ein Element. $\emptyset$ kann mit den Elementen jeder Menge vereinigt werden und vergrößert dann die Menge.

Die leere Menge wird empirisch überprüft. Eine Menge ohne Äpfel z.B., die eine Menge von Äpfeln vergrößern würde, ist ein Widerspruch in sich, die Menge bleibt gleich. Das gilt für beliebige Elemente. Die Existenz der leeren Menge ist empirisch widerlegt. Damit ist auch die Existenz der transfiniten Menge widersprüchlich.

V Umfassende Bedeutung von ∞ und Eliminierung der Widersprüche

Das Unendliche kann nur durch das Symbol ∞ beschrieben werden, nachdem das Transfinite widerlegt ist. Für die potentiell unendliche, permanent wachsende Länge gilt:

$$(1) l_{\text{inf}} = \infty$$

l_{inf} wird auf die unendliche natürliche Zahl abgebildet.

$$(2) n_{\text{inf}} = \infty$$

Damit ist der absolute Betrag gekennzeichnet, aber auch die Anzahl von Längeneinheiten bzw. natürlichen Zahlen wird durch ∞ beschrieben. Es existieren aber je nach räumlicher Dichte der Elemente viele unendliche Folgen natürlicher Zahlen 1, 2, 3, ..., n, ... auf dem Zahlenstrahl. Das Problem der Vergleichbarkeit hat Euklid gelöst. „Größen heißen kommensurabel, wenn sie ein gemeinsames Maß haben“. Er fordert die Festlegung von Standard Größen.

l_{inf} wird in die unendliche Folge von Standard Längeneinheiten l_{s_i} unterteilt. Die Zeichen $< >$ stehen für die immer größer werdende Anzahl der Standard Längen, es gilt :

$$(3) < l_{s_i} > = \infty$$

Die Standardstrecken werden auf Standard natürliche Zahlen n_{s_i} abgebildet :

$$(4) < n_{s_i} > = \infty$$

Bei Unterteilung in andere als Standardgrößen ergeben sich auch Vielfache oder Teile von ∞ . Bei

Strecken l , für die z.B. $l = ls / n$ gilt, erhält man :

$$(5) \quad < ls / n > = n \cdot \infty \quad | \quad n \cdot \infty > \infty$$

Dieses Ergebnis stimmt damit überein, daß das potentiell Unendliche letztlich Endlich ist, also die Regeln des Endlichen gelten müssen. Gegenwärtig wird widersprüchlich $n \cdot \infty = \infty$ gefordert und z.B. auch $\infty + \infty = \infty$. Tatsächlich gilt :

$$(6) \quad \infty + \infty = 2 \infty$$

VI Planck-Einheiten widerlegen konvergierende unendliche Folgen und Grenzwerte

Nur endliche konvergierende Folgen können begründet werden

Seit Euklid wird die unendliche Unterteilung von Strecken vorausgesetzt mit der Konsequenz der Abbildung auf reelle Zahlen mit unendlicher Stellenzahl. David Hilbert übernahm 1903 diese Voraussetzung in seinen *Grundlagen der Geometrie*, sie ist bis heute Teil des verbindlichen Systems der Geometrie. Max Planck forderte dagegen 1899 Einheiten wie die Planck-Länge, die nicht unterschritten werden können. Hilbert räumte 1926 ein, daß die unendliche Unterteilung der Realität widerspricht, zog daraus aber keine Konsequenzen für die Mathematik. Die Planck-Länge verbietet die unendliche Unterteilung der Strecke und damit auch die Abbildung auf Zahlen mit unendlicher Stellenzahl. Ein Limes unendlicher konvergierender Folgen von Ziffern existiert deshalb nicht, an seine Stelle tritt die Limitierung endlicher konvergierender Folgen durch eine letzte Ziffer z . Irrationale Zahlen und rationale Zahlen mit unendlicher Ziffernfolge besitzen keine Existenzberechtigung. Z.B. kann (1) nicht mehr gefordert werden, es gilt (2)

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1,414213 \dots = \sqrt{2}$$

$$(2) \quad \sqrt{2} = 1,414213 \dots z$$

z ist erreicht, wenn die geometrische Abbildung kleiner als die Planck-Länge ist.

Die Analysis, Differential- und Integralrechnung, wurde von Augustin-Louis Cauchy auf der Grundlage des Grenzwerts aufgebaut, auch er setzt unendliche Unterteilung voraus. Dabei werden potentiell unendliche Folgen von Zahlen mit immer kleiner werdender Differenz benachbarter Glieder, Cauchy-Folgen reeller Zahlen, gefordert, die für $n \rightarrow \infty$ in einem Grenzwert, dem Limes, konvergieren, z.B. $\sqrt{2}$ gemäß (1).

Als Konsequenz der Planck-Länge wird der Limes durch die limitierte endliche Folge ersetzt, s. z.B. (2). Die Analysis wird dadurch wesentlich vereinfacht.

Das Verfahren der Limitierung durch endliche Ziffernfolgen entspricht auch der realen Handhabung, die unendliche Ziffernfolgen nicht zuläßt.

Artikel VII Widerlegung der Unentscheidbarkeit von Gödels Satz

Kurt Gödel konstruierte 1931 einen Satz G der Theorie der natürlichen Zahlen, der über sich selbst aussagt, daß keine axiomatisch gegründete Sequenz von Formeln existiert, die den Satz mit der Gödelnummer $\ulcorner G \urcorner$ beweisen könnte :

$$(1) \quad G = \neg (\exists x: x \vdash \ulcorner G \urcorner)$$

Für diesen Satz wiederum fordert Gödel in seinem 1. Unvollständigkeitssatz, daß weder ein Beweis noch eine Widerlegung durch eine Sequenz existiert, obwohl er wahr ist. Diese Aussage ist richtig, sie beweist aber nicht, daß der Satz G nicht doch entschieden werden könnte.

Die wahre Bedeutung der 0 gemäß Artikel I, das Zeichen für „nichts“, eröffnet neue Möglichkeiten der Beweisführung. „Nichts“ und „Nicht-Existenz“ sind äquivalent. Sätze über „nicht-Existenz“ lassen sich durch äquivalente Sätze über „nichts“ beweisen. Das neue Axiom des „nichts“ der Beweisführung (2) wird definiert. Die Existenz des Zeichens $\mathbb{Z} = 0$ für eine leere Stelle, „nichts“, wird für die Beweisführung vorausgesetzt. Unter dieser Prämisse gilt, daß keine Sequenz Γ existiert, die einen durch eine Sequenz nicht beweisbaren Satz φ_{np} beweisen könnte.

$$(2) \quad (\exists \mathbb{Z}: \mathbb{Z} = 0) \vdash \neg (\exists \Gamma: \Gamma \vdash \varphi_{np})$$

Das Axiom wird auf Gödels Satz G angewandt und auf Gödelnummern abgebildet. Aus dem variablen Zeichen $\mathbb{Z}$ und der Variablen Γ werden die Zahlenvariablen x und $x > 1$. Die 0 besitzt

gemäß Gödel die Gödelnummer 1. Damit erhält man:

$(3) (\exists x: x = 1) \vdash \neg (\exists x > 1: x > 1 \vdash \ulcorner G \urcorner)$

Die rechte Seite von $\vdash$ ist Gödels Satz (1). Es gilt also:

$(4) (\exists x: x = 1) \vdash G$

Die Negation von G ist nicht beweisbar, wie mittels (3) nachvollzogen werden kann.

Durch „nichts“ der Beweisführung wird Gödels Satz, der auf der „nicht-Existenz“ seines Beweises beruht, entschieden. Die Theorie der natürlichen Zahlen ist vollständig, unvollständig ist das Axiomensystem das Gödel voraussetzte. Durch das neue 'Axiom des „nichts“ der Beweistheorie' wird es vervollständigt.

VIII Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik

David Hilbert sah einen „völlig befriedigenden Weg“, den Antinomien der Mengenlehre zu entkommen. Er fordert durch seinen Formalismus die Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik. Die Semantik sollte dann nur widerspruchsfreie Interpretationen erlauben. Der Überblick über die syntaktischen Zeichen, Formeln und Regeln zeigt, daß die Interpretation bereits inhärent ist. Die angebliche Bedeutungslosigkeit ist eine irreale Fiktion, die auch nicht vor Inkonsistenz schützte. Russells Antinomie besteht immer noch, die Widersprüchlichkeit des Transfiniten ebenfalls. Tatsächlich besteht die Bedeutung der Syntax darin, daß sie jede semantische Interpretation in höchster Abstraktion erfüllt.

IX Nichts, „Nichts“, nichts, „nichts“

Eine Unsicherheit und Zweifel ausdrückende Diskussion um die Existenz oder nicht-Existenz des „Nichts“ hatte Platon im *Sophistes* entschieden: „Das Nichtseiende war und ist nichtseiend und ist mitzuzählen als ein Begriff unter das viele Seiende.“ Das Nichts existiert nicht, aber der Begriff „Nichts“ existiert. Das metaphysische „Nichts“ repräsentiert absolute nicht-Existenz, während das mathematische „nichts“ etwas ganz anderes bedeutet. Der Unterschied zu nichts ohne Anführungszeichen muß geklärt werden

Da ist nichts. Das bedeutet, daß etwas, das existiert, an einer bestimmten Stelle nicht vorliegt. Ziffern und Zahlen existieren, aber sie liegen an einer leeren Stelle nicht vor. Für eine Lücke in einer Folge von Ziffern gilt, daß da nichts ist; die Kennzeichnung dieser leeren Stelle, die 0, repräsentiert das „nichts“. Die 0 ist gegenwärtig fälschlich als Zahl definiert, tatsächlich repräsentiert sie eine leere Stelle, „nichts“, „keine Zahl“.

Die 0 repräsentiert auch das „nichts“ der Beweistheorie. Das Zeichen für eine leere Stelle zeigt an, daß keine Sequenz vorliegt, die einen Satz beweisen könnte.

Das „nichts“ der Mengen wird durch das Zeichen $\emptyset$ repräsentiert. $\emptyset$ wird gegenwärtig fälschlich als „leere Menge“ definiert, die als Element einer Menge hinzugefügt werden kann und diese vergrößert. Tatsächlich repräsentiert das Zeichen „nichts“ der Mengen, „keine Menge“, die eine Menge nicht vergrößern kann. Die „leere Menge“ widerspricht der Realität, sie ist widersprüchlich.

X Auflösung der Antinomien

Nur die beiden wichtigsten Antinomien werden hier betrachtet, die Russell'sche und der 'Lügner'.

- An der Antinomie von Russell, die den Kern der Mengenlehre, den Begriff der Menge, in Frage stellt, entzündete sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts die sog. Grundlagenkrise der Mathematik. Russell unterscheidet zwischen Mengen, die sich selbst enthalten und Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Stein des Anstoßes ist die Menge R, die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Enthält R sich nicht selbst, so widerspricht dies der Voraussetzung, daß alle Mengen zusammengefasst werden sollen, die sich nicht selbst enthalten. Enthält R sich selbst, so verletzt dies die Voraussetzung, daß nur Mengen betrachtet werden sollen, die sich nicht selbst enthalten. Aber würden Mengen sich selbst enthalten, so würden die Elemente dadurch doppelt erfasst werden. Daraus folgt: Mengen können sich nicht selbst enthalten, auch R nicht. Dadurch ist Russells Antinomie aufgelöst.

- Die Antinomie des Lügners besagt : Epimenides, der Kreter, sagt: „Alle Kreter lügen“.

Es lässt sich nicht entscheiden, ob der Kreter damit die Wahrheit sagt oder ob er lügt.

Der Satz des Kreters enthält eine versteckte Variable, die 'Lüge'. Wird diese präzisiert, die Variable gebunden, so kann auch entschieden werden, ob alle Kreter diese verbreiten oder nicht.

Nicht alle sprachlichen Sätze, die eine versteckte Variable wie die 'Lüge' enthalten, sind unentscheidbar. Nur die Kombination mit der Selbstreferenz impliziert die Unentscheidbarkeit in Analogie zu Gödels Satz.

XI Krise des Denkens der Theoretiker der Grundlagen der Mathematik

- Die 0 wird seit dem 16. Jahrhundert als Zahl gesehen. In den vorhergehenden 3 Jahrtausenden galt dagegen die Tatsache, daß die 0 eine leere Stelle kennzeichnet, d.h. „nichts“ repräsentiert, „keine Ziffer“ und „keine Zahl“. Die Verkehrung der Bedeutung der 0, 'Zahl' zu sein, verletzt das 'tertium non datur' und ist deshalb widersprüchlich. Sie geht auf philosophische und religiöse Vorbehalte gegen das metaphysische 'Nichts' zurück, mit dem die 0 verwechselt wurde.
 - Eine angeblich konsistente Theorie des Transfiniten wird als Teil der Grundlagen der Mathematik postuliert, obwohl bereits vor einem Jahrhundert bestätigt wurde, daß sie im Widerspruch zur Realität steht. Dieses Denken der Grundlagentheoretiker verletzt die Kriterien der Wissenschaftlichkeit. Eine Theorie, die der Wirklichkeit widerspricht, ist notwendig und nachweisbar falsch.
 - Auch das Beharren auf der unendlichen Unterteilung von Strecken im Widerspruch zu Planck zeigt, daß in der Geisteswissenschaft Mathematik die Physik, d.h. die Realität, mißachtet wird.
 - Die leere Menge, die zur Begründung des Transfiniten axiomatisch postuliert wird, scheitert ebenfalls an der Realität.
 - Die nicht erfolgte Auflösung der Antinomien führte zur Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik, wodurch die Antinomien vermieden werden sollten. Diese bestehen aber weiter. Tatsächlich besteht die Bedeutung der Syntax darin, daß sie jede semantische Interpretation in höchster Abstraktion erfüllt.
 - Auch die Weigerung der Theoretiker, die Widerlegung der Unvollständigkeit der Theorie der natürlichen Zahlen durch die Existenz des „nichts“ der Beweisführung wahrzunehmen, belegen eine Krise des Denkens.
 - Die vor dem 20. Jahrhundert aufgebrochene jahrzehntelange Grundlagenkrise der Mathematik wurde durch die Maßnahmen zu ihrer Überwindung mittels des Axiomensystems ZFC nicht bewältigt, sondern verschärft. Die Verbannung des „nichts“ aus Mathematik und Logik wird als ein wesentlicher Grund der Krise erkannt, durch die Restitution des „nichts“ wird sie überwunden.
- Eine reEvolution der Grundlagen wird verwirklicht.