

XI Krise des Denkens der Theoretiker der Grundlagen der Mathematik ¹

April 2022. Eine angeblich konsistente Theorie des Transfiniten wird als Teil der Grundlagen der Mathematik postuliert, obwohl bereits vor einem Jahrhundert bestätigt wurde, daß sie im Widerspruch zur Realität steht. Dieses Denken der Grundlagentheoretiker verletzt die Kriterien der Wissenschaftlichkeit. Eine Theorie, die der Wirklichkeit widerspricht, ist notwendig und nachweisbar falsch.

Die leere Menge, die zur Begründung des Transfiniten postuliert wird, scheitert an der Realität. Auch das Beharren auf der unendlichen Unterteilung im Widerspruch zu Planck, die Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik, die nicht erfolgte Auflösung der Antinomien und die Weigerung, die Widerlegung der Unvollständigkeitssätze Gödel's wahrzunehmen, belegen eine Störung des Denkens. Die vor dem 20. Jahrhundert aufgebrochene jahrzehntelange Grundlagenkrise der Mathematik wurde durch die Maßnahmen zu ihrer Überwindung nicht bewältigt, sondern verschärft.

1. Einleitung
2. Das Transfinite
3. Die 0 und die leere Menge
4. Die unendliche Unterteilung
5. Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik
6. Die Antinomien
7. Kommentar

1. Einleitung

1.1. Der Ausschluß von Widersprüchen zwischen Theorie und Realität ist eine alternativlose Forderung der Wissenschaftlichkeit. Theorien müssen als Voraussetzung einer Weiterentwicklung über die Realität hinausgreifen dürfen, aber sobald nachgewiesen ist, daß sie ihr widersprechen, sind sie widerlegt. Im Folgenden wird diskutiert, ob die Grundlagen der Mathematik dieser Notwendigkeit genügen.

1.2. In der Natur existieren keine Widersprüche. Die Widersprüchlichkeit von Antinomien ist das Resultat scheinlogischer Fehlkonstruktionen des menschlichen Geistes, die aufgelöst werden können. **Mathematiker und Logiker stuften die Antinomien der Mengenlehre als unlösbar ein, die fatalen Konsequenzen für die Grundlagen der Mathematik werden diskutiert.**

2. Das Transfinite

Die Mengenlehre Georg Cantor's gehört zu den Grundlagen der Mathematik. In seiner Sicht des Unendlichen, des Transfiniten, fordert er Grenzen und Stufen. Zunächst beanspruchte er Übereinstimmung mit der Natur, zog sich dann aber auf die Position „denkbar und nicht anstößig“ zurück. Strecken können auf Zahlen abgebildet werden. In Artikel II wird demonstriert, daß transfinite Strecken und Zahlen im Widerspruch zur Realität stehen. David Hilbert hat sich 1926 in *Über das Unendliche* sehr klar geäußert. **„Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig“.** Das Transfinite sei aber eine **„unabhängig von aller Logik gesicherte Idee“**. Hilbert bestätigt Cantor einen „erfolgreichen, vollständigen Kalkül“, d.h. eine widerspruchsfreie Theorie. Auch das Axiomensystem von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel, ZFC, durch das Cantor's Lehre axiomatisch gegründet wurde, hat er gebilligt. Hilbert stellt also einen Widerspruch zur Realität fest, beharrt aber darauf, die mathematische Theorie sei konsistent. Auch heute wird niemand behaupten,

¹ Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, *„Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik*, Cuvillier Verlag, 2020.
Die Artikel dieser website behandeln die Schwerpunkte der Thematik.

Grenzen und Stufen im Unendlichen seien widerspruchsfrei mit Physik und Astronomie in Übereinstimmung zu bringen, an der mathematischen Theorie hält man aber fest. **Tatsächlich kann nachgewiesen werden, daß Cantor's Lehre gravierende Fehler enthält und auch ZFC widersprüchlich ist** (Artikel III, IV). Zudem widerlegt ZFC Cantor's Begründung des Transfiniten, indem die leere Menge, die in Cantor's Lehre nicht existiert, als Voraussetzung für transfinite Mengen gefordert wird.

Hilbert versucht, seine Überzeugung auch philosophisch zu rechtfertigen. Er fordert die Gültigkeit einer „Idee, die alle Erfahrung übersteigt“ und beansprucht dafür Übereinstimmung mit Immanuel Kant. Dieser hat tatsächlich synthetisch apriorische Urteile des Verstandes gefordert, die von der empirischen Erfahrung unabhängig sind und in Kategorien gegliedert werden. Kant hat dafür aber festgestellt: „Die Kategorie hat keinen anderen Gebrauch zur Erkenntnis der Dinge als ihre Anwendung auf Gegenstände der Erfahrung“. Hilbert hat Kant nicht verstanden.

Eine angeblich konsistente Theorie des Transfiniten wird als Grundlage der Mathematik gefordert, obwohl seit einem Jahrhundert akzeptiert ist, daß sie im Widerspruch zur Realität steht.

3. Die 0 und die leere Menge

3.1. Die 0 wird heute ohne jeden Zweifel als Zahl akzeptiert. Tatsächlich kann sie keine Zahl sein, sondern repräsentiert „nichts“ der Zahlen, d.h. „keine Ziffer“ und „keine Zahl“ (Art. I). Die angewandte Mathematik der „Zahl 0“ ist allerdings widerspruchsfrei, kritisch zu sehen ist dagegen die „Zahl 0“ in der Grundlagentheorie. Ein Widerspruch zwischen Mengenlehre und Arithmetik wird unreflektiert akzeptiert. **Die „Zahl 0“ vergrößert als Element eine Menge, der Summand „Zahl 0“ läßt die Summe aber unverändert.** Die revidierte Mengenlehre löst diesen Widerspruch auf, **„keine Zahl“, 0, kann weder eine Summe noch eine Menge vergrößern** (Art. II).

3.2. Fraenkel bestätigt die Gültigkeit des Axiomensystem der Mengenlehre nicht nur für abstrakte Objekte, sondern auch für „Äpfel, Birnen und Aprikosen“. **Die gegenwärtige Theorie fordert, daß die leere Menge $\emptyset$ als Element jede Menge vergrößert. Aber die leere Menge ohne Äpfel kann eine Menge von Äpfeln nicht vergrößern** (Artikel IV). Es wurde versäumt, die leere Menge in der Realität zu überprüfen, es wurde nicht erkannt, daß sie nicht existieren kann. Das Zeichen $\emptyset$ repräsentiert „kein Element“ und „keine Menge“.

4. Die unendliche Unterteilung

Seit Euklid wird die **unendliche Unterteilung von Strecken vorausgesetzt** mit der Konsequenz der Abbildung auf reelle Zahlen mit unendlicher Stellenzahl. Auch Hilbert übernahm 1903 diese Voraussetzung in seinen *Grundlagen der Geometrie*. **Max Planck begründete aber 1899**

Einheiten wie die Planck-Länge, die nicht unterschritten werden können. Hilbert räumte ein, daß die unendliche Unterteilung der Realität widerspricht, zog daraus aber keine Konsequenzen für die Geometrie und die reellen Zahlen. Die Mathematik steht im Widerspruch zur Physik. **Potentiell unendliche konvergierende Folgen und beschränkende Grenzwerte können nicht mehr gerechtfertigt werden. An ihre Stelle treten konvergierende, limitierte, endliche Folgen** (Artikel VI). Irrationale Zahlen sind nicht mehr begründbar, das gilt auch für den Grenzwert der Differential- und Integralrechnung.

5. Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik

Hilbert hat zur Neubegründung der Mathematik den Formalismus der mathematischen Logik entwickelt, um die Antinomien zu überwinden (Artikel VIII). „Es gibt einen völlig befriedigenden Weg den Paradoxien zu entkommen. **Das Zeichen hat keinerlei Bedeutung**“. **Auch die Formeln der Syntax der mathematischen Logik haben keine Bedeutung** und folgen gemäß rein formalen Regeln aufeinander. Erst durch die Semantik werden „die inhaltlichen

Überlegungen auf ein höheres Niveau verlegt“. Die eigentliche Mathematik ist „rein syntaktisch, frei von semantischer Interpretation“, begründet.

Kritiker lehnten die „völlig sinnleere eigentliche Mathematik“ ab. „Man gebe sich über die Inhaltslosigkeit dieser Hilbertschen Mathematik keiner Täuschung hin. Zeichen, die nichts bedeuten, sind ihrer Zeigefunktion entkleidete Zeichen, d. h. gar keine Zeichen.“

Daß sich aus bedeutungslosen Zeichen genau definierte aber bedeutungslose syntaktische Formeln und Regeln bilden lassen, ist eine irreale Fiktion. Trotzdem gehört diese Interpretation der Syntax zur verbindlichen Theorie der mathematischen Logik. Tatsächlich liegt ihre Bedeutung darin, daß sie jede semantische Interpretation in höchster Abstraktion erfüllt.

6. Die Antinomien

Die Antinomien der Mengenlehre, vor allem Russell's Antinomie, lösten an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert eine Grundlagenkrise der Mathematik aus. **Auch das Scheitern bei der Auflösung der Antinomien belegt eine folgenschwere Krise des Denkens:**

- a. **Russell's Antinomie** schreibt der „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ widersprüchliche Eigenschaften zu. In dem Buch „Nichts“ wird demonstriert, daß der Widerspruch durch den Nachweis aufgelöst werden kann, daß Mengen, die sich selbst enthalten, nicht begründbar sind. Die Grundlagenkrise hätte vermieden werden können.
- b. Das logizistische Programm von Russell und Whitehead, die Mathematik durch die **Principia Mathematica** auf die Logik zu gründen, **scheiterte vor allem an Russell's Antinomie.**
- c. Gottlob Frege mußte seine Definition der Menge aufgrund dieser Antinomie aufgeben. Bis heute existiert **keine Definition der Menge**, es wird nur gefordert, daß sie den Axiomen genügen soll.
- e. Cantor ging davon aus, daß ausschließlich Mengen existieren. Die Antinomie von Burali-Forti bestand in dem Nachweis, daß die unendliche Folge der Ordinalzahlen keine Mengenbildung zuläßt. Selbst Cantor räumte diese Tatsache in einem Brief ein. Im Axiomensystem ZFC wird sie dagegen bestritten. **„Andere Objekte als Mengen existieren für uns überhaupt nicht.** Vor allem ist die Bildung paradoxer Mengen (Antinomien von Burali-Forti, Russell usw.) durch unsere Axiome ausgeschlossen“, schreibt Fraenkel. Im selben Artikel rühmt er aber die - antinomische - unendliche Folge der Ordinalzahlen als „eine der kühnsten Schöpfungen Cantor's“. Später wurden Axiomensysteme entwickelt, die auch unendliche Folgen zulassen, trotzdem ist ZFC immer noch als wichtigstes Axiomensystem etabliert.

7. Kommentar

Die Grundlagentheoretiker der Mathematik haben es versäumt, die Übereinstimmung ihrer Geisteswissenschaft mit der Realität als unabdingbares Korrektiv zu etablieren. Immanuel Kant hat mit seiner Transzendentalphilosophie die Gegensätze von Rationalismus und Empirismus überwunden. **Die Grundlagentheoretiker bleiben hinter Kant zurück.**

Eine verschärfte Krise des Denkens ist aber dann gegeben, wenn ein Widerspruch zur Realität erkannt wird, aber trotzdem eine konsistente mathematische Theorie postuliert wird. Das ist beim Transfiniten der Fall. **Eine Mißachtung der Kriterien der Wissenschaftlichkeit liegt in einer Disziplin vor, die Carl Friedrich Gauß zur Königin der Wissenschaften krönte.**

Zur Widerlegung dieser Aussage könnte auf die Akzeptanz imaginärer Zahlen verwiesen werden. Sie seien in der Realität nicht nachweisbar aber trotzdem zu ihrer Beschreibung geeignet, wie z.B. in der Elektrizitäts- und Quantentheorie. Das ist richtig, aber in Messungen treten nur Größen auf, die durch Quadrierung imaginärer Terme entstehen, sodaß imaginäre Zahlen nicht mehr erscheinen. Diese sind nur für eine effiziente Formulierung hilfreich. Transfinite Zahlen und Mengen können dagegen nirgends mit der Realität in Verbindung gebracht werden und sind auch nirgends hilfreich. Die Summe der vorgelegten Argumente belegt eine Krise des Denkens der Grundlagentheoretiker. Das Transfinite, das als im Widerspruch zur Natur stehend bekannt ist, wird mit der leeren Menge begründet, von der bei Betrachtung der Realität nachgewiesen werden kann, daß sie nicht existiert.

Die Grundlagenkrise der Mathematik wurde durch die Maßnahmen, die sie beheben sollten, nicht bewältigt sondern im Gegenteil verschärft.

Der Autor hat Artikel zur Publikation in wissenschaftlichen Zeitschriften eingereicht, die die Widersprüche der Grundlagen belegen und sie aufheben. Zentral ist die Wiedereinführung des „nichts“ in die Mathematik. Die Aussagen wurden kommentarlos abgelehnt oder falsche Argumentation unterstellt, der Diskurs wird verweigert. **Tatsachen, die falsche Dogmen widerlegen, werden durch die offiziellen Vertreter der Mathematik und mathematischen Logik bisher nicht zur Kenntnis genommen.**

Diese Aussagen gelten auch für die 0. Eine Übereinstimmung der Auseinandersetzung um die Bedeutung der Null mit der Kontroverse um das helio-geozentrische Weltbild ist bemerkenswert. Daß die Erde um die Sonne kreist war bereits in der Antike bekannt. Aufgrund von Vorbehalten in Philosophie und Religion wurde diese Erkenntnis verdrängt und das ptolemäische als das richtige System gefordert. Astronomische Tatsachen führten dann zur kopernikanischen Wende, die zunächst massiv durch die katholische Kirche unterdrückt wurde und in dem Prozeß der Inquisition gegen Galilei gipfelte.

Analog war in der Antike die Bedeutung der 0, „nichts“ und „keine Zahl“, etabliert, bevor Vorbehalte in Philosophie und Religion die widersprüchliche Verkehrung in „etwas“ und „Zahl“ bewirkten. Empirische Tatsachen beweisen, daß die ursprüngliche Bedeutung wahr ist.

Das oben beschriebene Verhalten der offiziellen Vertreter der Mathematik gleicht eher dem der Priesterschaft der Inquisition des 17. Jahrhunderts als dem von Wissenschaftlern der Moderne. Von dem Verdikt **betroffen ist auch die Aufhebung der Unvollständigkeitssätze Gödel's**. Der Beweis gründet auf einem neuen Axiom (Artikel VII), das die Äquivalenz der Existenz des „nichts“ der Beweisführung² zur „nicht-Existenz“ eines Beweises formuliert.

Auch diese offizielle Weigerung, evolutionäre Logik nachzuvollziehen bzw. zu prüfen, legt eine Krise des Denkens offen. Die Wertschätzung des Autors für Mathematik und mathematische Logik, wie auch - zugegebenermaßen etwas irritiert - für Mathematiker(inne)n und Logiker(inne)n, wird dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt. Dazu beigetragen hat die **inoffizielle Stellungnahme** zweier Professoren. „**Ich wünsche Ihnen Erfolg bei Ihrer 'Nichts'-Attacke**“ und „**Ich bin überzeugt, daß Sie recht haben. Aber Ihrem Vorschlag einer Kooperation möchte ich nicht nachkommen. Dem Hauen und Stechen, das folgen wird, möchte ich mich nicht aussetzen.**“

Aber die Wende der Grundlagentheorie ist aufgrund der vorgestellten Tatsachen nicht aufzuhalten. Die Eliminierung von Widersprüchen und falschen metaphysischen Voraussetzungen vereinfacht die Theorie substantiell. Mathematik und Logik werden dadurch gestärkt.

² Die 0 repräsentiert nicht nur das „nichts“ der Zahlen, d.h. „keine Zahl“, sondern auch das „nichts“ der Beweisführung, d.h. „kein Beweis“.