

X. Auflösung der Antinomien

Zunächst wird der Unterschied zwischen Antinomien und Paradoxien definiert, der in der Literatur nicht klar abgegrenzt ist. Als Antinomien werden Widersprüche bezeichnet, die nicht auflösbar sind (bzw. scheinen). Das Paradoxon ist nur scheinbar widersprüchlich und läßt sich logisch erklären. Tatsächlich gibt es in der Natur keine Antinomien, sondern nur widersprüchliche Erklärungsversuche des Menschen. Der Grund der scheinbaren Widersprüchlichkeit läßt sich aufdecken und beseitigen, nur Paradoxien existieren. Antinomien sind scheinlogische Denkfehler. Im Folgenden werden nur die 'Antinomien' diskutiert, die in der Mathematik eine entscheidende Rolle gespielt haben bzw. immer noch spielen.

1. Russells Antinomie
2. Der Barbier
3. Burali-Forti
4. Die Menge aller Mengen
5. Epimenides der Lügner

1. Russells Antinomie

Die Antinomie von Russell, die nicht primär auf das Transfinite abzielt, sondern den Kern der Mengenlehre, den Begriff der Menge, in Frage stellt, wurde als so gravierend empfunden, daß sich daran zu Beginn des Jahrhunderts die sog. Grundlagenkrise der Mathematik entzündete.

Russell unterscheidet zwischen Mengen, die sich selbst enthalten, wie z.B. der Menge aller Mengen und den üblichen Mengen, wie z.B. der Menge aller Äpfel, die sich nicht selbst enthalten.

Stein des Anstoßes ist die Menge R, die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Russell fragt, ob R sich selbst enthält oder nicht und stellt fest, daß in beiden Fällen ein Widerspruch nachgewiesen werden kann.

Enthält R sich nicht selbst, so widerspricht dies der Voraussetzung, daß a l l e Mengen zusammengefasst werden sollen, die sich nicht selbst enthalten. Enthält R sich selbst, so verletzt dies die Voraussetzung, daß n u r Mengen betrachtet werden sollen, die sich nicht selbst enthalten. Wenn das 'Element sein' durch das Zeichen $\in$ und das 'nicht Element sein' durch $\notin$ ausgedrückt wird, wird Russells Antinomie wie folgt formuliert:

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

Aus der Voraussetzung, daß R Element von R ist, folgt widersprüchlich, daß R nicht Element von R ist und umgekehrt gilt das gleiche.

Die entscheidende Frage ist, ob es überhaupt Mengen geben kann, die sich selbst enthalten.

Wir betrachten z.B. die Menge aller Pferde. Würde sie sich selbst enthalten, dann würden alle Pferde ein zweites Mal erfasst. Die Pferde würden doppelt gezählt werden und das widerspricht der Festlegung des Mengenbegriffs. Diese Argumentation gilt für beliebige Mengen beliebiger Elemente. **Mengen können sich nicht selbst enthalten.**

Auch die Russell'sche Menge R kann sich nicht selbst enthalten. Die Voraussetzung der Antinomie erweist sich als hinfällig.

$R \in R$ ist falsch, $R \notin R$ ist aber richtig. Die Äquivalenz $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ existiert nicht, der Widerspruch ist aufgelöst.

Die Mathematiker sahen und sehen auch heute noch das Problem nicht bei $R \in R$, sondern fälschlicherweise bei R. „Es gibt keine Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten“, gilt in allen modernen axiomatischen Mengenlehren. Russells Menge ist nach Vorstellung der Mathematiker keine zulässige, sondern eine „antinomische“ Menge. Die Axiome von ZFC und weiterer Axiomensysteme wurden unnötigerweise so formuliert, daß R verboten ist.

2. Der Barbier

Russell hat neben seiner nach ihm benannten Antinomie den 'Barbier' erfunden, der seine Antinomie metaphorisch illustrieren sollte.

(1) „Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.“

Die Frage ist: rasiert der Barbier sich selbst ?

Geht man davon aus, daß er sich selbst rasiert, so steht dies im Widerspruch zu der Forderung, daß er all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Wird vorausgesetzt, daß er sich nicht selbst rasiert, so ist auch das nicht damit zu vereinbaren, daß er alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Es gibt eine einfache Lösung für die Frage, ob der Barbier sich selbst rasiert oder nicht: Man muß ihn beobachten, dann weiß man es.

- Wenn der Barbier sich nicht selbst rasiert, gehört er zu allen, die sich nicht selbst rasieren.

- Wenn der Barbier sich selbst rasiert, gehört er nicht zu allen, die sich nicht selbst rasieren.

In der Realität existiert keine Inkonsistenz, diese muß in der (un)logischen Konstruktion des 'Barbiers' verborgen sein.

- Der Barbier, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren, existiert nicht, wenn er sich selbst nicht rasiert.
- Der Barbier, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren, existiert auch nicht, wenn er sich selbst rasiert.

(2) Der Barbier gemäß Definition (1) existiert nicht.

Auch Russels Antinomie ist durch nicht-Existenz gekennzeichnet, $R \in R$ gibt es nicht.

3. Burali-Forti

Die Antinomie von Burali-Forti war die erste Antinomie der Mengenlehre, die festgestellt wurde.

Daß die unendliche Folge der Cantor'schen Ordinalzahlen einschließlich der transfiniten nicht als Menge zusammengefasst werden kann, wurde als Antinomie gesehen, da angeblich nur Mengen existieren.

Selbst innerhalb des Cantor'schen Gedankengebäudes ist die Bezeichnung „antinomisch“ aufschlußreich. Cantor hat die Existenz dieser „Unmenge“ selbst akzeptiert. Aufgrund der Fixierung auf Mengen wurde aber eine Antinomie behauptet. **Tatsächlich liegt keine Menge sondern eine unendliche Folge vor, die keineswegs als Antinomie gesehen werden kann.** Das heute überwiegend zugrunde gelegte Axiomensystem ZFC geht wahrheitswidrig davon aus, daß nur Mengen existieren, also nur begrenzte Zusammenfassung von Elementen vorliegen. Mittlerweile existieren aber Axiomensysteme wie das von v. Neuman, Bernays, Gödel, NBG, welche unbegrenzte unendliche Folgen als sog. „echte Klassen“ einführen.

4. Die Menge aller Mengen

Die denkbar umfassendste Menge sollte die „Menge aller Mengen“ sein. Dann kann aber sofort eingewendet werden, daß die „Menge aller Teilmengen“ doch größer ist. Diese Tatsache wird als „Cantors Antinomie“ bezeichnet.

Die Menge der Teilmengen enthält dieselben Elemente wie die Menge, nur sind in den Teilmengen dieser Elemente in verschiedenen Zusammenfassungen kombiniert. Eine Menge von z.B. 3 Pferden besitzt folgende Teilmengen: Das erste, das zweite und das dritte Pferd. Das erste und das zweite, das erste und das dritte, das zweite und das dritte sowie alle drei Pferde. Das sind sieben Teilmengen. Eine Menge von n Elementen weist dann $2^n - 1$ Teilmengen auf. Das ist eine weniger, als die bisherige Theorie fordert, da dabei fälschlicherweise die nicht existente leere Menge mitgezählt wird.

An der Feststellung, daß die Teilmengen größer sind als die zugrunde liegenden Mengen, ist nichts Antinomisches zu erkennen. Auch daß aus der Menge aller Mengen die entsprechend

größere Menge von Teilmengen folgt, kann nicht als antinomisch gesehen werden. Allerdings existiert keine begrenzte „Menge aller Mengen“, sondern eine unbegrenzte „Folge aller Folgen“.

5. Epimenides der Lügner

Gödel hat in seiner Publikation von 1931 den 'Lügner' als „epistemologische Antinomie“ zitiert, die seinem 1. Unvollständigkeitssatz auf der sprachlich logischen Ebene entspreche.

Epimenides, der Kreter, sagt: „Alle Kreter lügen“.

Wenn Epimenides lügt, wäre seine Aussage, dass alle Kreter lügen, wahr. Das ist widersprüchlich. Wenn er die Wahrheit sagt, würde er damit bestätigen, dass er mit seiner Aussage lügt. Auch das ist ein Widerspruch. **Es lässt sich nicht entscheiden, ob der Kreter damit die Wahrheit sagt oder ob er lügt.** Der Versuch, den „Kreter“ zu entscheiden, führt zu antinomischen Aussagen.

Aber warum kann nicht entschieden werden, ob die Wahrheit gesagt oder ob gelogen wird?

Es fehlt die Information, welche Lüge die Kreter angeblich verbreiten. **Der Satz des Kreters enthält eine versteckte Variable, die 'Lüge'. Wird diese präzisiert, die Variable gebunden, so kann auch entschieden werden, ob alle Kreter diese verbreiten oder nicht.** „Alle Kreter lügen über die Athener“ wäre ein solches Beispiel. Jetzt kann überprüft werden, ob diese Aussage zutrifft oder nicht. Vorher fehlte die notwendige Information, um eine Entscheidung herbeizuführen, ob der Satz des Epimenides wahr ist oder nicht.

Natürlich sind nicht alle sprachlichen Sätze, die eine versteckte Variable wie die 'Lüge' enthalten, unentscheidbar. „Sokrates sagt: 'Alle Kreter lügen' ist entscheidbar. **Nur die Kombination mit der Selbstreferenz impliziert die Unentscheidbarkeit in Analogie zu Gödel's Satz.**