

VIII Fiktion der Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik ¹

Dez. 2022. David Hilbert sah einen „völlig befriedigenden Weg“, den Antinomien der Mengenlehre zu entkommen. Er fordert durch seinen Formalismus die Bedeutungslosigkeit der Syntax der mathematischen Logik. Die Semantik soll dann nur widerspruchsfreie Interpretationen erlauben. Der Überblick über die syntaktischen Zeichen, Formeln und Regeln zeigt, daß die Interpretation bereits inhärent ist. Die angebliche Bedeutungslosigkeit ist eine irrealer Fiktion, die auch nicht vor Inkonsistenz schützte.

1. Einleitung
2. Hilberts Formalismus
3. Skizze der Syntax der Prädikatenlogik 1. Stufe
4. Kritik am Formalismus und die Widerlegung der Bedeutungslosigkeit der Syntax

1. Einleitung

Mengenlehre und mathematische Logik bilden die beiden Fundamente der Mathematik. Die Prädikatenlogik 1. Stufe ist die wichtigste Säule der mathematischen Logik, sie ist die Sprache, in der die Mengenlehre besprochen wird.

Durch die Antinomien von Cantor's Mengenlehre wurde eine Grundlagenkrise der Mathematik ausgelöst, sie hatte auch Auswirkungen auf die **mathematische Logik**. **Drei wichtige Schulen** bildeten sich heraus, der durch Gottlob Frege und Bertrand Russell geprägte **Logizismus**, der vor allem durch Luitzen Brouwer vertretene **Intuitionismus** sowie der **Formalismus**, den David Hilbert forderte. Dessen Argumentation setzte sich letztlich durch. Dabei wird die strikte Trennung einer formalen, bedeutungslosen Syntax und ihrer Interpretation durch die Semantik vertreten.

2. Hilberts Formalismus

Hilbert beschreibt einen „völlig befriedigender Weg, den Paradoxien ² zu entkommen.“ „Wie wir sahen hat sich das abstrakte Operieren mit allgemeinen Begriffsumfängen und Inhalten als unzulänglich und unsicher herausgestellt.“ Als Vorbedingung einer **Neubegründung der Mathematik** nennt er „**das Zeichen, das keinerlei Bedeutung“ hat**. Er stellt auch fest, daß die **Formeln** des Logikkalküls³ an sich **keine Bedeutung** haben und **Regeln** durch **rein formale Prozesse** gebildet werden. Hilbert distanziert sich ausdrücklich von Frege, der Sinn und Bedeutung voraussetzt. Er definiert dann im wesentlichen die Syntax der heutigen Prädikatenlogik 1. Stufe. Ein Prädikat in diesem Kontext ist eine Formel mit einer freien Variablen. Im 2. Schritt werden dann durch die Semantik „die inhaltlichen Überlegungen auf ein höheres Niveau verlegt zugleich wird in der Mathematik eine strenge und systematische Trennung zwischen den Formeln und formalen Beweisen einerseits und den inhaltlichen Überlegungen andererseits möglich.“ **Hilbert stellt fest, daß die Grundlagen der Mathematik rein syntaktisch, frei von semantischer Interpretation, sichergestellt seien.**

3. Skizze der Syntax der Prädikatenlogik 1. Stufe

Um den Formalismus mit dem Postulat der Bedeutungslosigkeit der Syntax beurteilen zu können, wird diese in ihren Grundzügen skizziert.

3.1. Zeichen

-
- ¹ Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, „*Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik*, Cuvillier Verlag 2020.
 - ² Hilbert bezeichnet widersprüchliche Aussagen als „Paradoxien“, heute werden diese „Antinomien“ genannt.
 - ³ Theorie der mathematischen Logik, Prädikatenlogik 1. Stufe

logische Zeichen:

Variable $x, x_0, x_1, \dots$

aussagenlogische Verknüpfungen $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (folgt),
 $\leftrightarrow$ (äquivalent)

Existenzquantor $\exists$ (es existiert)

das Gleichheitszeichen $=$

nicht-logische Zeichen

Relationszeichen $>, <$

Funktionszeichen $+, \cdot$

Individuenkonstanten $c, d, e, \dots$

3.2. Terme, Formeln und Regeln

Mit diesem Alphabet lassen sich Terme bilden. Alles, was auf einer Seite einer Gleichung bzw. Relation stehen kann, genügt dem Begriff Term. Die Verknüpfung von Termen durch ein Funktionszeichen ergibt einen neuen Term. Sind z.B. x und y Terme, so ist z. B. auch $x + y$ ein Term. Terme werden durch Relationszeichen zu Formeln verknüpft.

Die syntaktisch zulässigen formalen Regeln sind wie folgt definiert:

1. Ist ϕ eine Formel, so auch $\neg \phi$.
2. Sind ϕ und ψ Formeln, so auch $\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$
3. Ist ϕ eine Formel und x eine Variable, so ist auch $\exists x \phi$ eine Formel.
4. $s = t$ für beliebige Terme s, t .
5. $R (t_1, \dots, t_n)$ für jedes Relationszeichen R und beliebige Terme $t_1, \dots, t_n$
Ein Beispiel für $R (t_1, t_2)$ ist z. B. $n < m$.
6. Das sind alle Formeln.

4. Kritik am Formalismus und die Widerlegung der Bedeutungslosigkeit der Syntax

Kritiker lehnten die „völlig sinnleere eigentliche Mathematik“ ab. „Man gebe sich über die völlige Inhaltslosigkeit dieser Hilbertschen Mathematik keiner Täuschung hin. Zeichen, die nichts bedeuten, sind ihrer Zeigefunktion entkleidete Zeichen, d. h. gar keine Zeichen.“ Andere Kritiker haben sich ähnlich geäußert.

Auch die Semiotik als übergeordnete Wissenschaft widerspricht Hilbert's Ansatz bedeutungsloser Zeichen. Sie deuten auf etwas hin, sie be'deuten'. Von dieser Voraussetzung ging bereits Aristoteles aus, der als Erster die Semiotik beschrieb und sie gilt auch danach wie bei Charles Sanders Peirce.

Daß sich aus den Zeichen 3.1. genau und nur die Formeln und Regeln 3.2 bilden lassen, wenn alles bedeutungslos sein soll, ist eine irrealer Fiktion. Tatsächlich können die Formeln und Regeln nur gebildet werden, wenn Sinn und Bedeutung der Zeichen inhärent vorausgesetzt wird, wie in dem Buch „Nichts“ demonstriert wird.

Trotzdem hat sich Hilbert's Formalismus durchgesetzt. **Aber nicht die Differenzierung von Syntax und Semantik ist das Problem, sondern die angebliche Bedeutungslosigkeit und Unabhängigkeit der Syntax von der Realität.** Hilbert's Motiv, Bedeutungslosigkeit zu fordern, war, den Antinomien zu entkommen. Aber damit wird keine einzige Antinomie aufgelöst, vor allem der Auslöser der Grundlagenkrise, Russell's Antinomie, bleibt ungelöst bestehen und Inkonsistenz der Axiome wurde nicht vermieden.

Die Auswirkungen können kaum unterschätzt werden.

Die Mathematiker und Logiker verschließen sich der intuitiven Erkenntnis von Zusammenhängen und entziehen sich dem Fegefeuer der möglichen Falsifizierung durch die Realität. Die Feststellung von Inkonsistenzen wird äußerst erschwert. Die Frage des Autors an eine(n) Lehrstuhlinhaber(in), was „aktuell unendlich“ und „transfinit“ in der heutigen Mathematik bedeute, wurde mit „ich weiß nicht, was aktuell unendlich bedeutet, ich weiß nicht, was transfinit bedeutet“, beantwortet. Damit wurde die Sinnlosigkeit der Frage nach der Bedeutung von etwas Bedeutungslosem ausgedrückt. Das sind die fatalen Konsequenzen der Unterstellung bedeutungsloser Zeichen, Formeln und

Regeln. Wer Bedeutungslosigkeit voraussetzt muß damit rechnen, daß Unsinn resultiert. Hilbert verwechselt Abstraktion von der Realität mit Unabhängigkeit von der Realität. Die „Neugründung der Mathematik“ auf einen bedeutungsleeren syntaktischen Formalismus ist ein Postulat, das der Realität nicht Stand hält. Die Wertschätzung der formalen Logik durch den Autor wird dadurch nicht beeinträchtigt. Er fordert aber, daß Bedeutung und Sinn der Syntax respektiert werden. **Tatsächlich liegt ihre Bedeutung darin, daß sie jede semantische Interpretation in höchster Abstraktion erfüllt.**