

VI Planck-Einheiten widerlegen konvergierende unendliche Folgen und Grenzwerte¹ Nur endliche konvergierende Folgen können begründet werden

Nov. 2022. Die irrationalen Zahlen sind als Grenzwerte potentiell unendlicher konvergierender Folgen rationaler Zahlen definiert, die unendliche Ziffernfolgen der irrationalen Zahlen bedingen. Reelle Zahlen können durch Abbildung von Strecken erzeugt werden. Die Unterteilung von Strecken ist allerdings durch die Planck-Länge begrenzt, woraus bei Abbildung auf reelle Zahlen nur endliche Stellenzahlen resultieren. Potentiell unendliche Folgen immer kleiner werdender Differenzen der Strecken und Zahlen sowie Grenzwerte können nicht mehr gerechtfertigt werden. An ihre Stelle treten limitierte, endliche Folgen und Stellenzahlen.

Für die Analysis, die Differential- und der Integralrechnung, trifft dies ebenfalls zu. Auch hier bewirkt die Planck-Länge die Limitierung. Grenzwerte, $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ und Infinitesimale treten nicht auf. Die Limitierung und $\Delta x = 0$, „nichts“², sind die entscheidenden Kriterien. In der Praxis wird notwendigerweise schon immer mit Limitierungs-Werten gerechnet, die Rechenoperation muß irgendwann abgebrochen werden. Potentiell unendliche Folgen und Grenzwerte sind irrealen Ideen.

1. Einführung
2. Rationale und irrationale Zahlen
 - 2.1 Gegenwärtige Theorie
 - 2.2. Die Konsequenzen der Planck-Länge
3. Analysis, Differential- und Integralrechnung
 - 3.1. Gegenwärtige Theorie
 - 3.2. Die Konsequenzen der Planck-Länge

1. Einführung

Seit Euklid wird die unendliche Unterteilung von Strecken vorausgesetzt mit der Konsequenz der Abbildung auf reelle Zahlen mit unendlicher Stellenzahl. David Hilbert übernahm 1903 diese Voraussetzung in seinen *Grundlagen der Geometrie*, sie ist bis heute Teil des verbindlichen Systems der Geometrie. **Max Planck forderte dagegen 1899 Einheiten wie die Planck-Länge, die nicht unterschritten werden können.** Hilbert räumte 1926 ein, daß die unendliche Unterteilung der Realität widerspricht, zog daraus aber keine Konsequenzen für die Mathematik. **Isaac Newton ging bei der Begründung der Differential- und Integralrechnung, der Analysis, von immer kleiner werdenden Infinitesimalen aus³. Die Analysis wurde von Augustin-Louis Cauchy auf der Grundlage des Grenzwerts neu aufgebaut, auch er setzt unendliche Unterteilung voraus.**

Die unbegrenzte Unterteilung erweist sich auf der Grundlage der heutigen Physik mit einer Begrenzung durch Planck-Einheiten als falsch. Die Konsequenzen werden im Folgenden diskutiert.

2. Rationale und irrationale Zahlen

2.1. Gegenwärtige Theorie

Rationale Zahlen sind als Brüche ganzer Zahlen definiert. Irrationale Zahlen lassen sich nicht durch solche Quotienten darstellen. Gemeinsam bilden beide die reellen Zahlen.

Die irrationalen Zahlen sind allerdings numerisch nicht darstellbar. Die Zahl $\sqrt{2}$ z.B. ist als Dezimalbruch mit potentiell unendlicher Stellenzahl $n \rightarrow \infty$ noch nicht definiert. Erst der Limes, der die potentiell unendliche Folge der Näherungswerte begrenzt, bestimmt $\sqrt{2}$ (1).

1 Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, „Nichts“ *Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik*, Cuvillier Verlag, 2020

2 Artikel I Empirische Tatsache: Die 0 ist keine Zahl sondern repräsentiert „nichts“

3 Gottfried Wilhelm Leibniz forderte dagegen konstante aber unendlich kleine Infinitesimale dx , dy , Mittlerweile spielen die Infinitesimalen nur noch die Rolle einer historischen Notation ohne praktische Bedeutung.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} 1,414213 \dots = \sqrt{2}$$

Da irrationale Zahlen als numerische Zahlen nicht existieren, stellt sich die Frage nach der Berechtigung des Grenzwerts. Er scheint durch die geometrische Strecke, z.B. $\sqrt{2}$, gerechtfertigt. Die Abbildung von Strecken und anderer geometrischer Elemente auf Zahlen ist seit Euklid ein Kernelement der Mathematik.

2.2. Die Konsequenzen der Planck-Länge

Die Planck-Länge verbietet die unendliche Unterteilung der Strecke. Unter dieser Voraussetzung zeigt die Abbildung auf Zahlen fundamentale Änderungen im Vergleich zur gegenwärtigen Theorie. Die unendlichen Folgen von Dezimalstellen weichen endlichen Folgen. Die letzte Dezimalstelle z minimalen Werts entspricht der minimalen Strecke, der Planck-Länge. $\sqrt{2}$ wird real durch (2) ausgedrückt, weitere Stellen können berechnet werden, sind aber sinnlos. **Ein Limes unendlicher konvergierender Folgen von Ziffern (1) existiert nicht, an seine Stelle tritt die Limitierung endlicher konvergierender Folgen (2) durch eine letzte Ziffer z..**

$$(2) \sqrt{2} = 1,414213 \dots z$$

Durch Abbildung auf eine Planck-Länge existiert eine minimale rationale Zahl $r_{\min}$.

Auch die geometrische Darstellung von $\sqrt{2}$ wird durch Planck-Längen limitiert, d.h. die Existenz der geometrischen Größe $\sqrt{2}$ rechtfertigt keinen Limes irrationaler Zahlen.

Zahlen, deren Ziffern im Endlichen begrenzt sind, können als Quotient ganzer Zahlen dargestellt werden. Nur rationale Zahlen endlicher Stellenzahl können gefordert werden, **irrationale Zahlen und auch rationale Zahlen unendlicher Stellenzahl verlieren ihre Existenzberechtigung.**

Dieser Aussage scheint zu widersprechen, daß bereits Euklid einen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ vorgelegt hat, d.h. daß $\sqrt{2}$ nicht als Quotient ganzer Zahlen dargestellt werden kann.

Die Widerlegung findet sich in dem Buch „Nichts“, hier wird nur angemerkt, daß Euklid's Beweis die unendliche Unterteilung voraussetzt. Diese Feststellung gilt auch für die Beweisführung durch Dedekind-Schnitte und Intervallschachtelung.

Nach bisheriger Theorie bildet die transfinite Menge der reellen Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ mit der Kardinalzahl $2^{\aleph_0}$ das Kontinuum. Diese Menge ist nicht durch die natürlichen Zahlen abzählbar. In der Realität wird das geometrische Kontinuum aus einer endlichen Folge von Planck-Längen bzw. ihrer Zusammenfassung zu Strecken des Segments $[0, 1]$ gebildet. Durch Abbildung des geometrischen Kontinuums entsteht das arithmetische Kontinuum als endliche Folge rationaler Zahlen des Intervalls $[0, 1]$. Die Menge ergibt sich nach der Festlegung einer Standard-Länge.

3. Analysis, Differential- und Integralrechnung

3.1. Gegenwärtige Theorie

3.1.1. Die Definition des Grenzwerts ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis. Entscheidend ist die Einführung einer Größe ε als Element der Zahlen a_n einer potentiell unendlichen Folge $(a_n)_n$.

(3) Eine Folge $(a_n)_n$ heißt konvergent gegen den Limes a_{limes} , wenn für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m existiert, sodaß für alle $n > m$ gilt: $|a_n - a_{\text{limes}}| < \varepsilon$.

Bezüglich der ausführlichen Diskussion wird auf das Buch „Nichts“ verwiesen. **Entscheidend ist, daß potentiell unendliche Folgen von Zahlen mit immer kleiner werdender Differenz benachbarter Glieder, Cauchy-Folgen reeller Zahlen, gefordert werden, die für $n \rightarrow \infty$ in einem Grenzwert, dem Limes, konvergieren.**

3.1.2. Bei der Differentialrechnung wird die Steigung der Tangente einer Funktion $y = f(x)$ bestimmt. Die Steigung wird als Grenzwert einer Folge von Näherungswerten $\Delta y / \Delta x$ ermittelt. Das Verfahren der Differentiation besteht darin, Δx in potentiell unendlich vielen Schritten immer kleiner zu machen, um schließlich mit dem **Limes $\Delta x \rightarrow 0$** die Steigung zu erhalten. An den Stellen x_i ergibt sich die Steigung als $\lim \Delta y / \Delta x = f'(x_i)$. Dabei gilt $\Delta y = f(x_i + \Delta x) - f(x_i)$

$$(4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_i + \Delta x) - f(x_i)] / \Delta x = f'(x_i)$$

3.1.3. Durch die **Integralrechnung** wird der Flächeninhalt $F(x)$ zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ bestimmt. Die konkreten Schritte bestehen darin, die Fläche in n Rechtecke der Breite Δx zu unterteilen, Der **Grenzwert** wird für $n \rightarrow \infty$ und $\Delta x \rightarrow 0$ ermittelt:

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \cdot \Delta x = F(b) - F(a) \quad \Delta x \rightarrow 0$$

3.2. Konsequenzen der Planck-Länge

3.2.1. Der Limes (3) wird durch die Limitierung (6) ersetzt. Eine Folge $(a_n)_n$ heißt konvergent gegen die Limitierung a_{limit} , wenn die rechnerische Differenz der beiden letzten Glieder, $a_z - a_{z-1}, \leq r_{\text{min}}$ ist :

$$(6) \text{Limitierung } (a_n)_n = a_{\text{limit}} \quad a_z - a_{z-1} \leq r_{\text{min}}$$

3.2.2. Die Zahlen für $f'(x_i)$ der **Differentialrechnung** sind in der Realität bereits heute keine **Grenzwerte**, die der Definition (4) genügen, wie in dem Buch „Nichts“ demonstriert wird.. **Tatsächlich** wird der Quotient $\Delta y / \Delta x$ in endlichen Schritten so entwickelt, daß für $\Delta x = 0$ ein eindeutig bestimmter **Limitierungs-Werte** $\Delta y / \Delta x$ ermittelt wird (7). Potentiell unendliche Folgen von Rechenschritten mit $\Delta x \rightarrow 0$ treten nicht auf, ein Grenzwert existiert nicht. Die Ziffernfolge ist in der Praxis auf endliche Werte begrenzt.

$$(7) \text{Limitierung} = [f(x_i + \Delta x) - f(x_i)] / \Delta x = f'(x_i) \quad \Delta x = 0$$

3.2.3. Auch für die **Integralrechnung** ergibt eine endliche Folge von Schritten einen eindeutig bestimmten **Limitierungs-Wert für $\Delta x = 0$** . Dabei wird die Summe der n Rechtecke der Breite Δx zwischen a und b so umgeformt, daß n eliminiert wird und $\Delta x = 0$ gesetzt werden kann. $n \rightarrow \infty$ tritt nicht auf.

$$(8) \text{Limitierung } \sum_a^b (f(x_i) \cdot \Delta x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) = F(b) - F(a) \quad \Delta x = 0$$

Funktionen sind differenzierbar und integrierbar, wenn die Werte für Steigung und Integral als $f(\Delta x)$ so formuliert werden können, daß sich für $\Delta x = 0$ ein eindeutig bestimmter Limitierungs-Wert ergibt. **Grenzwerte, $\Delta x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ und Infinitesimale treten nicht auf.**

Die potentiell unendlichen konvergierenden Folgen und Grenzwerte der Analysis sind irrealen Ideen. In der Praxis, **wenn konkrete Zahlen ermittelt werden, muß notwendigerweise schon immer mit Limitierungs-Werten gerechnet werden**, die Rechenoperation muß irgendwann abgebrochen werden. Eine unendliche Zahl von Rechenschritten, die in einen numerischen Grenzwert münden, ist unmöglich.

Limitierung und $\Delta x = 0$, „nichts“, sind bereits jetzt die entscheidenden Kriterien der Analysis.