

V Umfassende Bedeutung von ∞ und Eliminierung der Widersprüche

Nov. 2022. Das Symbol ∞ wird nur dann umfassend verständlich, wenn eine Standardlänge vorausgesetzt wird. Das Axiom der Unendlichkeit definiert ∞ durch die potentiell unendliche Folge von Standard Längeneinheiten der Achse des Euklidischen Raumes. Wenn non-Standard Größen betrachtet werden, ergeben sich Anzahlen, die größer oder kleiner als ∞ sind. Das trifft auch für natürliche Zahlen zu, die durch Abbildung von Strecken generiert werden. Cantor setzte eine einzige transfinite Menge natürlicher Zahlen voraus, tatsächlich existieren sehr viele unbegrenzte unendliche Folgen dieser Zahlen.

Im Gegensatz zur bisherigen Theorie gelten konsistente Regeln, z.B. $\infty + n > \infty$ und $\infty + \infty = 2 \infty$.

1. Einleitung
2. ∞ und Standard Größen
3. Axiom der Unendlichkeit und Satz der Zahl ∞
4. ∞ und non-Standard Größen
5. Widerspruchsfreie Darstellung und Rechenregeln für ∞

1. Einleitung

Das ZFC-Unendlichkeitsaxiom, das die Existenz der transfiniten Menge $\mathbb{N}$ und die transfinite Ordinalzahl ω der natürlichen Zahlen fordert, ist widersprüchlich¹. Die Beschreibung des Unendlichen ist damit auf das Symbol ∞ zurückgeführt². Dessen Bedeutung ist gegenwärtig noch nicht vollständig ausgelotet und es werden ihm widersprüchliche Eigenschaften zugeschrieben. Zunächst wird festgestellt, daß **viele unendliche Folgen, uF, natürlicher Zahlen 1, 2, 3, n auf dem Zahlenstrahl existieren**. Cantor hatte dagegen eine einzige transfinite Menge dieser Zahlen vorausgesetzt. Drei verschiedene uF werden abgebildet.

Tab. 1 Verschiedene unendliche Folgen natürlicher Zahlen.

(a) 0		1		2.....n.....
(b) 0	1	2	3	4n.....
(c) 0				1n.....

Mit dem Zeichen ∞ kann dieser Unterschied gegenwärtig nicht vergleichend beschrieben werden. Zudem steht ∞ für das potentiell Unendliche, also letztlich Endliche, es müssten also die Gesetze des Endlichen gelten. Tatsächlich werden aber andere Regeln gefordert, wie z.B:

- (1) $\infty + n = \infty$
- (2) $\infty + \infty = \infty$

2. ∞ und Standard Größen

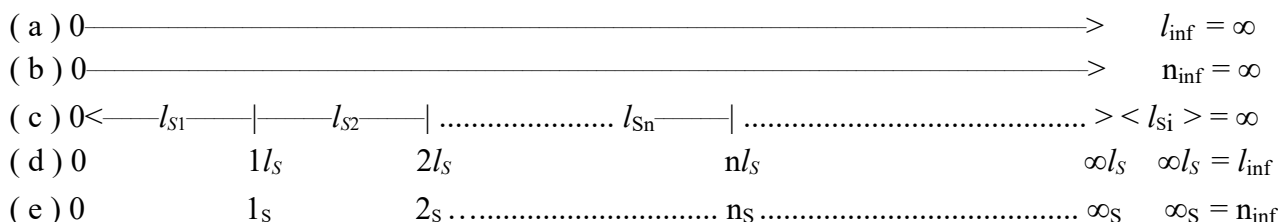
Euklid hat das Problem der Vergleichbarkeit gelöst. „**Größen heißen kommensurabel, wenn sie ein gemeinsames Maß haben**“. Er fordert die **Festlegung von Standard Größen**. Diese sind noch nicht relevant beim Absolutbetrag der Unendlichkeit der **Abb. 1**. Für die unendliche Länge gilt $l_{\text{inf}} = \infty$ (a). l_{inf} wird auf den gleichen Absolutbetrag der unendlichen natürlichen Zahl $n_{\text{inf}} = \infty$ (b) abgebildet. Um die Vergleichbarkeit der verschiedenen Folgen der Tab. 1 herzustellen, wird l_{inf} in die uF der Standard Längeneinheiten, $\langle l_{\text{si}} \rangle = \infty$, unterteilt (c). Die Zeichen $\langle \rangle$ stehen für die Anzahl der Elemente einer uF. l_{s} und Vielfache von l_{s} bilden eine uF (d). ∞l_{s} steht für die

1 Artikel II Widersprüchlichkeit der transfinite Zahl ω und der Menge $\mathbb{N}$

2 Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, „Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik, Cuvillier Verlag, 2020

potentiell unendliche Zahl von Standardstrecken. Die Strecken (d) werden auf Standard natürliche Zahlen abgebildet (e). ∞_S ist die potentiell unendliche Zahl von Standard natürlichen Zahlen. Es gilt $\infty_S = n_{inf} = \infty$. ∞_S fasst die Standard natürlichen Zahlen zusammen und schließt sie ab. Die heute übliche Darstellung der uF der natürlichen Zahlen durch 1, 2, 3,, n, ist unvollständig. Nur (e) unter Einschluß von ∞_S repräsentiert die Folge umfassend.

Abb. 1 ∞ und Standard Größen



3. Axiom der Unendlichkeit und Satz der Zahl ∞

Die Erläuterungen des Abschnitts 2. werden formal definiert.

∞ ist die potentiell unendliche Länge l_{inf} der Achse des euklidischen Raumes zu einem Zeitpunkt t.

(3) Definition: $\infty = l_{inf}$

Das Axiom der Unendlichkeit legt die Existenz der Länge $l_{inf} = \infty$ fest, die größer ist als jede endliche Menge $\{ l_{si} \}$ von Standardlängen. Der Betrag von l_s kann beliebig festgelegt werden.

(4) Axiom: $\exists l_{inf} : l_{inf} = \infty : (\forall \{ l_{si} \} : l_{inf} > \{ l_{si} \}) (i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$

Die potentiell unendliche natürliche Zahl ∞ wird durch Abbildung von l_{inf} auf n_{inf} generiert:

(5) Definition: $l_{inf} = \infty \mapsto n_{inf} = \infty$

Der Satz der Zahl ∞ legt die Existenz der potentiell unendlichen Zahl $n_{inf} = \infty$ fest, die größer ist als jede endliche Standard natürliche Zahl n_s . Die n_s werden durch Abbildung von Strecken $n l_s$ erzeugt.

(6) Satz : $\exists n_{inf} : n_{inf} = \infty : (\forall n_s : \infty > n_s) (n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$

4. ∞ und non-Standard Größen

Es ist zwar nur eine einzige Unendlichkeit ∞ definiert, aber es gibt viele Möglichkeiten, sie in Elemente unterschiedlicher Dichte d aufzuteilen (Tab. 1). Die Dichte ist durch die Menge von Einheiten pro Standard Einheit von Strecken bzw. natürlichen Zahlen definiert.

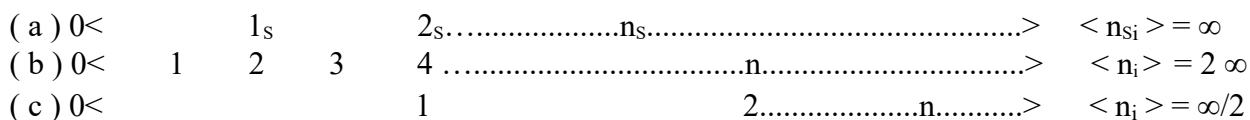
(7) $d = \{ l_i \} / l_s = \{ n_i \} / n_s$

Je nach der Dichte der Elemente einer uF ist ihre Anzahl gleich, größer oder kleiner als ∞ .

In Abb. 2 sind die Zahlen der Folge (a) der Tab. 1 als Standard natürliche Zahlen definiert, sodaß $< n_{si} > = \infty$ gilt. Aufgrund höherer Dichte besitzen die Zahlen (b) die Anzahl $< n_i > = 2 \infty$, für die Folge (c) gilt $< n_i > = \infty/2$.

Cantor hat nur eine einzige transfinite Menge der natürlichen Zahlen vorausgesetzt. Im Gegensatz dazu existieren sehr viele uF natürlicher Zahlen.

Abb. 2 Standard und non-Standard uF natürlicher Zahlen



Die Dichte der Elemente kann allerdings nicht unendlich wachsen. Die Planck-Einheiten können nicht unterschritten werden. Grenzwerte konvergierender unendlicher Folgen existieren nicht, sondern sind durch Planck-Einheiten als endliche konvergierende Folgen limitiert. Die fundamentalen Konsequenzen werden in Artikel VI diskutiert.

5. Widerspruchsfreie Darstellung und Rechenregeln für ∞

Die Definition von ∞ als Anzahl der Standard natürlichen Zahlen der uF erlaubt widerspruchsfreies Rechnen mit ∞ . Bei Betrachtung von Standard Zahlen in der Fläche ergibt die Addition von n wie auch von ∞ die Resultate (8) und (9) im Gegensatz zu (1) und (2):

$$(8) \quad \infty + n > \infty$$

$$(9) \quad \infty + \infty = 2 \infty$$

Auch auf der Achse des euklidischen Raumes existieren Zahlen die größer als ∞ sind wenn ein **späterer Zeitpunkt t^*** als der in (3) vorausgesetzte Zeitpunkt t zutrifft.

$$(10) \quad \infty^* \geq \infty$$

Auch weitere **Zahlen einer uF die kleiner als ∞ sind** existieren, wenn die Zählung der Elemente nicht mit 1 (11) sondern erst mit n + 1 beginnt (12).

$$(11) < 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \infty > = \infty$$

$$(12) < n + 1, \dots, \infty > = \infty - n$$

Eine **Folge unterschiedlicher Zahlen unter Einschluß von ∞** läßt sich für den 3-dimensionalen euklidischen Raum wie auch einen höher-dimensionalen mathematischen Raum begründen:

$$(13) \quad \infty + 1, \infty + 2, \dots, 2\infty, 2\infty + 1, \dots, \infty^2, \dots, \infty^3, \dots, \infty^n, \dots, \infty^\infty$$

Bei (13) wurden nur Standard Zahlen zugrunde gelegt. Die Betrachtung von **non-Standard Zahlen** eröffnet eine **Vielfalt weiterer Zahlen** unter Einschluß von ∞ , auf die nicht weiter eingegangen wird.