

IV Die Widersprüchlichkeit der leeren und der transfiniten Menge¹

April 2022. Der empirische Nachweis wird geführt, daß das Axiom, das die leere Menge fordert, der Realität widerspricht. Der Widerspruch zur Natur gilt auch für Cantor's Idee des Transfiniten, wie Hilbert eingeräumt hat. Leere und transfinite Menge gründen demgemäß auf rationalistischen Theorien, die der Empirie widersprechen, und deshalb notwendig falsch sind. Hilbert hat diesen Schluß aber nicht gezogen, sondern die mathematische Konsistenz des Transfiniten gefordert. Der formale Nachweis, daß die transfinite Menge nicht existiert, erfordert die Widerlegung des ZFC-Unendlichkeitsaxioms. Dieses setzt die leere Menge voraus, die gemäß empirischem Nachweis nicht existiert. Das Unendlichkeitsaxiom ist deshalb widersprüchlich. In Cantor's Lehre tritt die leere Menge nicht auf, ZFC steht im Widerspruch zu Cantor.

1. Einleitung
2. Gegenwärtige Theorie der leeren Menge
3. Empirische Widerlegung der leeren Menge
4. Axiom des „nichts“ der Mengen
5. Gegenwärtige Theorie der transfiniten Menge
6. Widerlegung der transfiniten Menge
7. Erkenntnistheorie

1. Einleitung

Das Axiomensystem ZFC von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel fordert die Existenz der leeren Menge sowie transfiniten Mengen.

Die leere Menge $\emptyset$ ist als Menge ohne Elemente definiert, ist aber selbst ein Element. $\emptyset$ kann mit den Elementen jeder Menge vereinigt werden und vergrößert dann die Menge.

(1) $\{ \emptyset, x_1, x_2, \dots, x_n \} \supset \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$

Die Existenz der transfiniten Menge setzt die leere Menge als 1. Element voraus.

Fraenkel hat sich dezidiert geäußert, daß die Mengenlehre „nicht nur für abstrakte Elemente“ gültig sei, sondern auch für „Äpfel, Birnen und Aprikosen“. Er hat aber nicht verifiziert, ob leere und transfinite Menge der Realität genügen. Die Überprüfung wird hier nachgeholt.

2. Gegenwärtige Theorie der leeren Menge

Zermelo hat die leere Menge axiomatisch als „uneigentliche“ Menge eingeführt. Bereits diese Charakterisierung weckt Zweifel. Das Axiom ist formal durch (2) definiert:

(2) Axiom: $\exists \emptyset: \forall x: \neg (x \in \emptyset)$

Die leere Menge $\emptyset$ existiert: Für alle Elemente x gilt: sie sind nicht Element von $\emptyset$.

Fraenkel's Begründung der leeren Menge ist aufschlußreich. Er argumentiert: „Aus rein formalen Gründen führen wir eine uneigentliche Menge ein, die leere Menge. Gemäß Cantor's Definition ist das keine Menge **Die Definition ist eine Festsetzung, die rein nach Momenten der Zweckmäßigkeit zu beurteilen ist.** Mit 'Richtigkeit' haben all diese Festsetzungen überhaupt nichts zu tun, wenn sie nur widerspruchsfrei zulässig sind.“ **Fraenkel fordert die leere Menge formal, um die transfinite Menge sicherzustellen.**

Die leere Menge wird am Beispiel von Äpfeln empirisch überprüft.

3. Empirische Widerlegung der leeren Menge

Eine Menge ohne Äpfel, die eine Menge von Äpfeln vergrößert, ist ein Widerspruch in sich, die Menge bleibt gleich.

¹ Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, „Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik, Cuvillier Verlag, 2020.

(3) $\{ \emptyset, \text{Apfel}_1, \text{Apfel}_2, \dots, \text{Apfel}_n \} = \{ \text{Apfel}_1, \text{Apfel}_2, \dots, \text{Apfel}_n \}$

Die Forderung (1) von ZFC, daß $\emptyset$ die Menge vergrößert, ist damit widerlegt. Die einzige widerspruchsfreie Bedeutung ist „kein Apfel“, also „nichts“ der Menge von Äpfeln. Diese Argumentation gilt für beliebige Elemente.

Die leere Menge existiert nicht. Das Axiom (2) ist empirisch widerlegt.

Die Existenz der leeren Menge wurde auch von vielen Mathematikern, Logikern und Philosophen bestritten. Bertrand Russell stellt fest: „Eine Klasse, die keine Elemente besitzt, kann überhaupt nichts sein.“ Auch Gottlob Frege hat die leere Menge kritisiert. Luitzen Brouwer lehnt sie, wie alle Intuitionisten, kategorisch ab. Kritisch zeigen sich auch Philosophen. Edward Jonathan Lowe argumentiert, daß es unklar sei, wie eine Menge ohne Elemente existieren solle. „Die 'leere Menge' bleibt eine ontologische Kuriosität, deren Bedeutung und Nützlichkeit in der Philosophie debattiert wird.“

4. Axiom des „nichts“ der Mengen

Allgemein gilt, dass „nichts“ der Dinge „kein Ding“ ist. Speziell für Mengen wird $\emptyset$ in Übereinstimmung mit der Realität definiert:

(4) Definition : $\emptyset$ ist das Zeichen, das „nichts“ der Mengen repräsentiert, d. h. „keine Menge“ und „kein Element“.

Das neue Axiom des „nichts“ der Mengen wird eingeführt:

Die Existenz des Zeichens $\mathcal{Z} = \emptyset$ ist äquivalent dazu, daß eine Menge M , die gleich $\emptyset$ ist, nicht existiert.

(5) Axiom : $\exists \mathcal{Z} : \mathcal{Z} = \emptyset \leftrightarrow \forall M : \neg (\exists M : M = \emptyset)$

5. Gegenwärtige Theorie der transfiniten Menge

Für die formale Entwicklung der transfiniten aus der leeren Menge wird die transfinite Induktion von John v. Neumann übernommen. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\emptyset$ das 1. Element mit der Kardinalzahl 0 ist. Bei der Betrachtung von 0 und die 1 ist klar, daß $\{ 0 \} = 1$ gilt, wobei die 1 das 2. Element der natürlichen Zahlen ist. Dementsprechend ist es plausibel, daß $\{ \emptyset \}$ das zweite Element mit der Ordinalzahl 1 ist. Die Vereinigung von $\emptyset$ und $\{ \emptyset \}$ ist dann das 3. Element mit der Ordinalzahl 2 (6, 7). Generell gilt, daß die Nachfolgermenge die Vereinigung der Vorgängermenge x und der Menge $\{ x \}$ ist. M_{trans} ergibt sich dann als erste transfinite Menge: Die zugehörigen Ordinalzahlen werden in (7) angezeigt.

(6)	$\emptyset$	$\{ \emptyset \}$	$\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$	$\{ \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \}$	 M_{trans}
(7)	0	1	2	3	 ω

Damit ist die **formale Darstellung des Unendlichkeitsaxioms (8)** nachvollziehbar:

Die Menge M_{trans} existiert: $\emptyset$ ist das 1. Element von M_{trans} und für alle Elemente x gilt: aus x ist Element von M_{trans} folgt: x vereinigt mit $\{ x \}$ ist Element von M_{trans} .

(8) $\exists M_{\text{trans}} : (\emptyset \in M_{\text{trans}} \wedge \forall x : (x \in M_{\text{trans}} \rightarrow x \cup \{ x \} \in M_{\text{trans}}))$

Gemäß ZFC ist $\emptyset \in M_{\text{trans}}$ für die transfinite Menge M_{trans} in gleicher Weise notwendig wie $0 \in \mathbb{N}$ für die transfinite Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (Artikel II)

6. Widerlegung der transfiniten Menge

Daß die transfinite Induktion (6) der Empirie widerspricht, wird bei der Betrachtung von Äpfeln deutlich. Die Menge der leeren Menge wäre als 2. Element der 1. Apfel. Das ist unmöglich. Damit ist auch die Existenz der transfiniten Menge widerlegt.

Formal beweist die nicht-Existenz der „leeren Menge $\emptyset$ “ gemäß Axiom (5), daß das

Unendlichkeitsaxiom (8) ungültig ist.

In Cantor's Lehre tritt die leere Menge nicht auf, das Unendlichkeitsaxiom steht also im Widerspruch zu Cantor.

7. Erkenntnistheorie

Ein weiterer fundamentaler Einwand gegen die Existenz transfiniter Zahlen und Mengen wurde bereits in Artikel II vorgetragen und wird hier wiederholt. **David Hilbert hat eingeräumt, daß das Transfinite im Widerspruch zur Realität steht und nur eine Idee sei.** Auch heute wird kein Mathematiker oder Logiker behaupten, daß das Transfinite widerspruchsfrei in Übereinstimmung mit Physik und Astronomie gefordert werden könne. Trotzdem wird eine mathematisch konsistente Theorie des Transfiniten postuliert. **Aber die Erkenntnistheorie fordert, dass eine rationalistische Idee, die der Realität widerspricht, notwendigerweise falsch ist.** Immanuel Kant hat die Gegensätzlichkeit von Rationalismus und Empirismus mit seiner Transzendentalphilosophie überwunden, **Das Transfinite scheitert bereits an der Erkenntnistheorie Kant's.**