

II Widersprüchlichkeit der transfinite Zahl ω und der Menge $\mathbb{N}$

April 2023. Über 2 Jahrtausende lang beherrschte Aristoteles' „infinitum actu non datur“, „ein begrenztes Unendliches gibt es nicht“, die Wahrnehmung des Unendlichen. Ende des 19. Jahrhunderts führte Georg Cantor mit seiner Mengenlehre das aktual Unendliche, Transfinite, mit dem Postulat von Grenzen, sogar Stufen im Unendlichen ein. Eine Grundlagenkrise der Mathematik war die Folge.

Cantor's Lehre war nicht axiomatisch begründet. Das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel legitimierte das Transfinite dann formal. Die Krise gilt damit als bewältigt.

Cantor's Lehre war zunächst hoch umstritten, setzte sich letztlich aber doch durch, sie bildet heute in der axiomatischen Form eine der Grundlagen der Mathematik. Im Folgenden wird gezeigt, daß sowohl die axiomatische als auch Cantor's Begründung der transfinite Zahl ω und der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen widersprüchlich sind ¹. Die Grundlagenkrise besteht weiter fort.

Die Wiedereinführung der wahren Bedeutung der 0, „nichts“ und „keine Zahl“, widerlegt die Existenz der transfiniten Terme.

1. Einleitung

1.1. Cantor

1.2. Das Axiomensystem ZFC

2. Die Begründung von ω und $\mathbb{N}$

2.1. Cantor's Begründung

2.2. Begründung durch ZFC

3. Die Widerlegung von ω und $\mathbb{N}$

3.1. Intuitive Widerlegung

3.2. Empirische Widerlegung durch Längeneinheiten und den 0-Punkt

3.3. Vollständige Induktion widerlegt Cantor

3.4. Widerlegung des ZFC-Unendlichkeitsaxioms durch das Axiom des „nichts“

4. Wissenschaftstheorie

1. Einleitung

1.1. Cantor

Vor Cantor galt Aristoteles' „infinitum actu non datur“, „ein aktuales² Unendliches gibt es nicht“. Dieser Satz begründete über zwei Jahrtausende lang die Sicht auf das Unendliche. Die Folge natürlicher Zahlen z.B. setzt sich unbegrenzt immer weiter fort:

(1) 1 2 3 4 n

Georg Cantor forderte in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts in seiner Mengenlehre dagegen Grenzen, sogar Stufen im Unendlichen. Er bezeichnet sie als „aktual unendlich“ oder „transfinit“.

Die unendliche Folge (1) bricht zwar nie ab, Cantor fordert aber darüber hinaus eine größere transfinite Grenze ω (2). Der Begriff „transfinit“ erklärt sich dadurch, daß die natürlichen Zahlen für Cantor nur potentiell unendlich, d.h. letztlich endlich, finit sind, erst ω ist transfinit. Das Postulat einer transfiniten Grenze endloser Zahlen verlangt nach einer intuitiv verständlichen Erklärung. Der Grenzwert irrationaler Zahlen, wie z.B. $\sqrt{2}$ (3), ist nach Cantor seinem „innersten Wesen nach den transfiniten Zahlen gleich“. Die Abbildung der unendlichen Folge der Näherungswerte und $\sqrt{2}$ auf natürliche Zahlen und ω soll die Existenz der transfiniten Zahl begründen.

(2) 1 2 3 4 5 6 n ω

(3) 1 1,4 1,41 1,414 1,4142 1,41421 $\sqrt{2}$

¹ Die Thematik einschließlich der Literaturnachweise sind Teil des Buches von Gert Treiber, „Nichts“ Krise und reEvolution der Grundlagen der Mathematik, Cuvillier Verlag, 2020

² d.h. begrenztes

Cantor's Gesamtwerk der Mengenlehre, das nicht nur Grenzen sondern auch Stufen des Transfiniten, Antinomien und kontraintuitive Sätze beinhaltet, war zunächst hoch umstritten. **Die Mengenlehre verursachte eine Grundlagenkrise der Mathematik**, die Jahrzehnte andauerte. Cantor's Lehrer Leopold Kronecker z.B. urteilte, er wisse nicht, ob dessen Werk Philosophie oder Religion sei, Mathematik sei es jedenfalls nicht. **Henri Poincaré kritisierte, daß zukünftige Generationen das Transfinite als Krankheit betrachten werden, von der die Mathematik genesen sei.** Richard Dedekind war dagegen einer der unverbrüchlicher Unterstützer Cantor's. **Letztlich entscheidend für den Durchbruch war David Hilbert: „Aus dem Paradies, das Cantor für uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.“**

1.2. Das Axiomensystem ZFC

Um die Mengenlehre auf ein sicheres Fundament zu stellen, entwickelten Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel das Axiomensystem ZFC, das widerspruchsfrei die Ableitung der Sätze der Mengenlehre erlaubte, **es gilt als Endpunkt der Krise.** Heute übt nur noch eine kleine Minderheit Kritik an Cantor bzw. ZFC, bisher ohne Widersprüche nachweisen zu können. **Die folgenden Ausführungen zeigen, daß Widersprüche vorliegen, die Grundlagenkrise besteht immer noch.**

Ein weiterer Artikel³ legt gravierende Fehler Cantor's offen.

Die Widerlegung des Transfiniten ist in diesem Artikel auf die natürlichen Zahlen und die transfinite Zahl ω beschränkt. Die Widersprüchlichkeit des ZFC-Unendlichkeitsaxiom für transfinite Mengen unter Voraussetzung der leeren Menge ist Gegenstand eines späteren Artikels⁴.

2. Die Begründung von ω und $\mathbb{N}$

2.1. Cantor's Begründung

Cantor sprach zunächst vom Transfiniten als der „Begründung des Realen in der Natur vorhandenen“. Die „Körpermaterie“ sah er durch die transfinite Menge der natürlichen Zahlen abgebildet. Später begründete er transfinite Zahlen nur noch als **„denkbar und nicht anstößig“**. Seine **Erklärung über die Abbildung der irrationalen Zahlen** schloß die 0 als Element aus (2). **Cantor hat die 0 zurecht nicht als natürliche Zahl gesehen.**

2.2. Begründung durch ZFC

2.2.1 Intuitive Begründung

Fraenkel hat die natürliche Zahl 0 „mit gebieterischer Notwendigkeit“ gefordert, „da nur dadurch die transfinite Zahl ω gerechtfertigt werden kann“.

Bereits im Endlichen zeigt sich der entscheidende Grund. Die Menge $n+1$ der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, n ist größer als die letzte Zahl n:

$$(4) \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n \} = n+1$$

Zudem begrenzt die Zahl $n+1$ die Folge der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, n.

Bei der unendlichen Folge natürlicher Zahlen gibt es zwar keine letzte Zahl, aber es ist aufgrund von (4) nachvollziehbar, daß die transfinite Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gemäß ZFC größer ist als die natürlichen Zahlen (5), und diese Zahlen durch eine Zahl ω begrenzt werden (6).

$$(5) \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \} = \mathbb{N}$$

$$(6) 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots, \omega$$

Auf ω folgen weitere transfinite Zahlen $\omega+1, \omega+2, \dots$.

Die „Zahl 0“, die die Menge vergrößert, ist unabdingbare Voraussetzung für $\mathbb{N}$ und ω bei ZFC.

2.2.2. Formale Begründung durch das Unendlichkeitsaxiom

Formal demonstriert das Unendlichkeitsaxiom das Postulat, 0 in die transfinite Menge aufzunehmen. Angewendet auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen x wird das Axiom durch (7) formuliert:

³ Artikel III Cantor's Fehler in der Lehre des Transfiniten

⁴ Artikel IV Widersprüchlichkeit der leeren und der transfiniten Menge

(7) $\exists \mathbb{N}: 0 \in \mathbb{N} \wedge \forall x: (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \cup \{ x \} \in \mathbb{N})$

Die Existenz der transfiniten Menge $\mathbb{N}$ setzt die 0 als erstes Element von $\mathbb{N}$ voraus und für alle Zahlen x gilt: Wenn x ein Element von $\mathbb{N}$ ist, dann ist x vereinigt mit $\{ x \}$ auch ein Element von $\mathbb{N}$. Damit ist Fraenkels zwingende Notwendigkeit formal festgelegt. Ohne ins Detail zu gehen, stellen wir das fest, daß $x \cup \{ x \}$ garantiert, dass immer die nächstgrößere Zahl, einschließlich ω , erzeugt wird.

3. Die Widerlegung von ω und $\mathbb{N}$

3.1. Intuitive Widerlegung

Die 0 ist, empirisch belegt und durch ein neues Axiom sichergestellt, keine Zahl, sondern „nichts“ der Zahlen, d.h. „keine Zahl“⁵. Dadurch kann eine Menge von Zahlen nicht vergrößert werden. Bei Summen ist die 0 bereits das neutrale Element, die Summe wird durch sie nicht vergrößert, wie beispielhaft durch (8) gezeigt wird. Dagegen wird gemäß gegenwärtiger Theorie die Menge durch die 0 vermehrt (9).

(8) Summe: $(0 + 1_1 + 1_2 + \dots + 1_n) = n$

(9) Gegenwärtige Mengenlehre: $\{ 0, 1_1, 1_2, \dots, 1_n \} = n + 1$

Aufgrund der Bedeutung „nichts“, „keine Zahl“ der 0, sind Mengen (10) und Summen (8) gleich. Damit ist eine Diskrepanz zwischen Arithmetik und Mengenlehre aufgelöst.

(10) Revidierte Mengenlehre: $\{ 0, 1_1, 1_2, \dots, 1_n \} = n$

Die Menge ist nicht größer als die letzte Zahl n , wie fälschlich durch (4) gefordert wird.

Dies gilt für alle natürlichen Zahlen, wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann. Auch der Einschluß der 0 ändert daran nichts.

Die transfiniten Terme $\mathbb{N}$ und ω , die größer sind als natürliche Zahlen, existieren nicht.

Die folgenden Überlegungen bestätigen diese Aussagen.

3.2. Empirische Widerlegung durch Längeneinheiten und den 0-Punkt

Die Folge gleicher Längeneinheiten einer Geraden (11) wird durch die natürlichen Zahlen geordnet, der 0-Punkt wird der 0 zugeordnet (12). Die Menge ebenso wie die Summe von Längeneinheiten l_i ($i = 1, 2, \dots n \dots$) entspricht der gesamten Strecke:

(11) $| \text{---} l_1 \text{---} | \text{---} l_2 \text{---} | \dots \text{---} l_n \text{---} | \dots$

(12) $0 \text{---} l_1 \text{---} | \text{---} l_2 \text{---} | \dots \text{---} l_n \text{---} | \dots$

Die Summe wie auch die Menge der Längeneinheiten ist, unter Einschluß des 0-Punktes, nicht größer als sie durch das Element l_n festgelegt wird. Diese Argumentation trifft aufgrund vollständiger Induktion im Unendlichen genauso zu:

Eine größere Länge, die eine transfinite Menge von Einheiten repräsentieren würde, existiert nicht.

Die Abbildung von Längeneinheiten und des 0-Punktes auf natürliche Zahlen und die 0 bestätigt, daß die transfinite Menge $\mathbb{N}$ und die Zahl ω nicht existieren.

3.3. Vollständige Induktion widerlegt Cantor

Cantor hat die 0 zurecht nicht als natürliche Zahl gesehen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist immer gleich der letzten Zahl n und nie größer als eine natürliche Zahl:

(13) $\{ 1, 2, 3, 4, \dots n \} = n$

Die vollständige Induktion schließt eine transfinite Menge $\mathbb{N}$, die größer wäre als die natürlichen Zahlen, aus und widerlegt Cantor.

Fraenkel steht ebenfalls im Widerspruch zu Cantor, indem er „mit gebieterischer Notwendigkeit“ die 0 als natürliche Zahl fordert, um die transfinite Zahl ω zu rechtfertigen. Er suggeriert aber Übereinstimmung mit Cantor, indem er diesen falsch zitiert. Cantor publizierte die Folge

$1, 2, 3, \dots n \dots \omega, \omega+1, \dots$ ohne die 0, Fraenkel unterstellt ihm die Folge $0, 1, 2, 3, \dots n \dots \omega, \omega+1, \dots$ mit der 0.

5 Artikel I Empirische Tatsache: Die 0 ist keine Zahl sondern repräsentiert „nichts“

3.4. Widerlegung des ZFC-Unendlichkeitsaxioms durch das Axiom des „nichts“

In Artikel I wird das Axiom des „nichts“ der Zahlen begründet:

$$(14) \exists \mathcal{S}: \mathcal{S} = 0 \leftrightarrow \forall x: \neg (\exists x : x = 0)$$

Das Zeichen $\mathcal{S} = 0$, das „nichts“, „keine Zahl“ repräsentiert, existiert. Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass für alle Zahlen x gilt: sie sind nicht gleich 0.

Axiom (14) schließt die Voraussetzung von (7) aus.

Das ZFC-Unendlichkeitsaxiom wird durch das Axiom des „nichts“ der Zahlen widerlegt.

Die Existenz des „nichts“ der Zahlen beweist die Nichtexistenz der transfiniten Menge $\mathbb{N}$.

4. Wissenschaftstheorie

Ein weiterer grundlegender Einwand gegen die Existenz der transfiniten Zahlen ist erkenntnistheoretischer Natur. **David Hilbert, einer der renommiertesten Mathematiker seiner Zeit, hat bestätigt, dass das Transfinite der Realität widerspricht und nur eine Idee ist.** Er hat dies 1926 in Über das Unendliche [20] sehr deutlich gemacht. „Das Unendliche wird nirgends verwirklicht; es existiert nicht in der Natur, noch ist es als Grundlage für unser intellektuelles Denken zulässig“. Das Transfinite ist aber eine „von aller Logik unabhängig gesicherte Idee“. Hilbert bestätigt damit einen „gelungenen, vollständigen Kalkül“ für Cantor's Lehre, frei von Widersprüchen. Er billigt auch ZFC. **Hilbert** stellt einen Widerspruch zur Realität fest, **besteht jedoch darauf, dass die mathematische Theorie konsistent sei. Aber die Erkenntnistheorie fordert, dass eine Idee, die der Realität widerspricht, notwendigerweise falsch ist.**

Auch heute wird kein Mathematiker oder Logiker behaupten, Grenzen und Stufen im Unendlichen seien widerspruchsfrei mit Physik und Astronomie in Einklang zu bringen. Trotzdem wird rationalistisch immer noch eine mathematisch konsistente Theorie des Transfiniten postuliert, obwohl sie der Empirie widerspricht.

Der Philosoph Immanuel Kant hat solche Widersprüche durch seine Transzendentalphilosophie überwunden, Widersprüche zwischen rationalistischen Vorstellungen und empirischen Tatsachen werden ausgeschlossen. Das Transfinite scheitert bereits an Kants Erkenntnistheorie.